05/10/2015
Αριθμητική Ανάλυση: Η επιστήμη που μετατρέπει ένα μαθηματικό πρόβλημα σε ισο-δύναμο που λύνεται ή προσεγγίζεται από έναν Η/Υ
Στόχος: η δημιουργία "αξιόπιστων" και "αποτελεσματικών" μεθόδων με την έννοια ότι τα σφάλματα είναι ελεγχόμενα (αξιοπιστία), με την έννοια ότι έχουμε τα αποτελέσματα όταν τα χρειαζόμαστε (αποτελεσματικότητα)

Σφάλματα
Έστω x η ακριβής τιμή μιας ποσότητας και x^* η προσεγγιστική, ορίζουμε ως σφάλμα $\varepsilon = x^* - x$
Απόλυτο σφάλμα: $|\varepsilon| = |x^* - x|$ (η απόσταση)
Σχετικό σφάλμα: $\delta = \frac{\varepsilon}{x}$, $(x \neq 0)$ x: η ποσότητα που μετράμε $\delta = \frac{x^* - x}{x} \simeq \frac{x^* - x}{x^*}$

Απόλυτο σχετικό σφάλμα $|\delta| = \frac{|x^* - x|}{|x|} \simeq \frac{|x^* - x|}{|x^*|}$

Είδη Σφαλμάτων
1) Σφάλμα Διακριτοποίησης ή προσέγγισης ή αποκοπής
2) Σφάλμα στρογγύλευσης

π.χ για το 1) Να προσεγγισθεί η $f'(x_0)$, $x_0 \in (a,b)$, η f είναι συνεχής στο (a,b) και δύο φορές παραγωγίσιμη $f \in \underbrace{C^2(a,b)}$ → χώρος συναρτήσεων με $|f''(x)| \leq M$ $x \in (a,b)$ Ποιο είναι το σφάλμα;

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, αντί αυτού θεωρούμε $x_1 \in (a,b)$ κοντά στο x_0 και υπολογίζουμε

$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, Ποιο είναι το σφάλμα; Αναπτύσσουμε κατά Taylor της $f(x_1)$ στο x_0
Έστω $h = x_1 - x_0$. Από το Taylor θα έχουμε $f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(\xi) =$
$= f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$, όπου $\xi \in (x_0, x_1)$ ή $\xi \in (x_1, x_0)$ δηλ. $\xi \in (\min\{x_0, x_1\}, \max\{x_0, x_1\})$

$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} - \frac{(x_1 - x_0)}{2} f''(\xi)$. $\varepsilon = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} - f'(x_0) = \frac{x_1 - x_0}{2} f''(\xi)$

$$|\varepsilon| = \frac{|x_1 - x_0|}{2}|f''(\xi)| \le \frac{|x_1 - x_0|}{2} \cdot M = \frac{|h|}{2} \cdot M$$

$$|f'''(x)| \le M_1, \ x \in (a,b)$$

Εστω $f \in C^3(a,b)$ να προσεγγιστεί η $f'(x)$, $x_0 \in (a,b)$ θεωρώ $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 - h$, $h > 0$ και προτίνεται η προσέγγιση: $f'(x_0) \simeq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2h}$, ποιο είναι το σφάλμα;

Εφαρμόζω Taylor. Παίρνω ανάπτυγμα $f(x_1)$ κ $f(x_2)$ απο x_0

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1) \quad \xi_1 \in (x_0, x_1)$$

αφού $x_2 < x_1$.

$$f(x_2) = f(x_0 - h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_2, x_0)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = 2h f'(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2) = 2h f'(x_0) + \frac{h^3}{6}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right) \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2h} - \frac{h^2}{12}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2h} - f'(x_0) = \frac{h^2}{12}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)$$

$$|\varepsilon_1| = \frac{h^2}{12}\left|f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right| \le \frac{h^2}{12}\left(|f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)|\right) \le \frac{h^2}{12} 2M_1 = \frac{h^2}{6} M_1$$

(Η δευτερη μέθοδος είναι καλύτερη.)